数理解析研究所講究録 1476 巻 2006 年 145-151

巡回 Nazarov-Wenzl 代数のセル基底の構成

京都大学・数理解析研究所　有木　進 (Susumu Ariki)

Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

1　cellular 代数とは

cellular 代数とは Graham と Lehrer によって導入された概念であって，有限次元代数の既約加群の分類や，quasihereditary であることの証明，分解行列が unitriangular であることの証明などに力を発揮する概念である．実際，代数群に由来して現れるほとんどすべての代数は cellular 代数になっている．他方，従来から代数的組み合わせ論ではヤング図形やその亜種を Bratteli 図にもつ半単純環が研究されてきたが，その手法をほとんど踏襲するだけでモジュラー表現の世界にいける便利な道具でもある．組み合わせ論的手法が有効な世界であるだけに，若い組み合わせ論の研究者の参入を期待したい．

この節では cellular 代数が産まれる母体となった対称群のモジュラー表現論を例にとって cellular 代数を説明する．

定義 1.1. R を可換環，A を R- 代数とする．

(i) 半順序集合 Λ,

(ii) 位数 2 の R- 線形反自己同型 $a \mapsto a^*$,

(iii) 各 λ に対する有限集合 $T(\lambda)$,

が与えられているとする．A が R- 自由基底 $\{m_{st}\}_{(s,t)\in\sqcup_{\lambda\in\Lambda}T(\lambda)\times T(\lambda)}$ をもち，

(a) $m_{st}^* = m_{ts}$.

(b) $(s,t)\in T(\lambda)\times T(\lambda)$ に対し，R- 線形写像 $r_{st}: A\to R$ が存在して，任意の $a\in A$ に対し

$$am_{st} - \sum_{u\in T(\lambda)} r_{su}(a)m_{ut} \in \sum_{(u,v)\in\sqcup_{\mu>\lambda}T(\mu)\times T(\mu)} Rm_{uv}$$

であるとき，$\{m_{st}\}$ を A のセル基底，A を cellular 代数という．

上記の定義において，$r_{su}(a)$ が t に依存しないのが要点である．

定義 1.2. セル加群 $C(\lambda)$ とは，$\{m_s\}_{s\in T(\lambda)}$ を R-自由基底とする R-加群で

$$am_s = \sum_{u\in T(\lambda)} r_{su}(a)m_u \quad (a \in A)$$

により A-加群とみなしたものをいう．

例 1.3. $A = RS_n$ を対称群 S_n の群環とする．

(i) Λ を box の数が n のヤング図形全体のなす集合に支配的順序を考えた半順序集合，

(ii) A の位数 2 の R-線形反自己同型を $w \mapsto w^{-1}$，

(iii) $T(\lambda)$ を shape λ の標準盤全体のなす集合，

とする．ここで標準盤とは，$[1,n] = \{1,2,\ldots,n\}$ が λ の各 box に書きこまれており，各行で左から右に増加，各列で上から下へ増加，という条件をみたすものをいう．標準盤を λ の box のなす集合 $\{x \in \lambda\}$ から $[1,n]$ への全単射とみなす．

次に m_{st} を定義したいのであるが，そのためまず記号を準備する．

$\lambda \in \Lambda$ とするとき，1行めに 1 から λ_1 までを左から右に順番に書きこみ，2行めに λ_1+1 から $\lambda_1+\lambda_2$ を左から右に順番に書きこみ，以下同様にして $1,\ldots,n$ を書きこんでできる標準盤を t^λ とかく．さて，任意の $s \in T(\lambda)$ に対し，

$$[1,n] \xrightarrow{(t^\lambda)^{-1}} \{x \in \lambda\} \xrightarrow{s} [1,n]$$

は $[1,n]$ から $[1,n]$ への全単射，すなわち対称群 S_n の元であるからこの元を $d(s)$ とかく．また，S_λ を λ の行固定化群とする．すなわち

$$S_\lambda = S_{\{1,\ldots,\lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1,\ldots,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \cdots$$

である．このとき，

$$m_{t^\lambda t^\lambda} = \sum_{w\in S_\lambda} w, \quad m_{st} = d(s)m_{t^\lambda t^\lambda}d(t)^*$$

により m_{st} を定めると，$\{m_{st}\}$ はセル基底になる．

具体的に $n=3$ の場合でやってみよう．$s_1 = (1,2), s_2 = (2,3)$ とする．

$$T((3)) = \{t^{(3)}\}, \quad T((2,1)) = \{t^{(2,1)}, s_2t^{(2,1)}\}, \quad T((1^3)) = \{t^{(1^3)}\}.$$

であり，$\lambda = (3)$ のとき，

$$m_+ = m_{t^{(3)}t^{(3)}} = 1 + s_1 + s_2 + s_1s_2 + s_2s_1 + s_1s_2s_1.$$

$\lambda = (2,1)$ のとき，

$$m_{11} = m_{t(2,1)t(2,1)} = 1 + s_1,$$
$$m_{21} = m_{s_2 t(2,1)t(2,1)} = s_2 m_{t(2,1)t(2,1)} = s_2 + s_2 s_1,$$
$$m_{12} = m_{t(2,1)s_2 t(2,1)} = m_{t(2,1)t(2,1)} s_2 = s_2 + s_1 s_2,$$
$$m_{22} = m_{s_2 t(2,1)s_2 t(2,1)} = s_2 m_{t(2,1)t(2,1)} s_2 = 1 + s_1 s_2 s_1.$$

$\lambda = (1^3)$ のとき， $m_- = m_{t(1^3)t(1^3)} = 1$ となる．

このとき， $s_1 m_+ = m_+$, $s_2 m_+ = m_+$ であり，

$$\begin{cases} s_1 m_{11} = m_{11} \\ s_1 m_{12} = m_{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} s_1 m_{21} = -m_{11} - m_{21} + m_+ \\ s_1 m_{22} = -m_{12} - m_{22} + m_+ \end{cases}$$

$$s_1 m_- = -m_- + m_{11}, \quad s_2 m_- = -m_- + m_{11} + m_{12} + m_{21} + m_{22} - m_+$$

である．それぞれ，単位表現，鏡映表現，符号表現がまったく同じ係数で現れた上で残りの項にそれより支配的順序で上のヤング図形に属する元が現れるから，確かに cellular 代数の定義をみたしていることがわかる．

この例でもわかるように，半単純環のときは正則表現が通常表現の上の行列環の直和なのであるが，直和の代わりに両側イデアルの filtration にすることによりモジュラー表現も扱えるようにしたのが， cellular 代数の概念である．

定義 1.4. $(s,t),(u,v) \in T(\lambda) \times T(\lambda)$ とする．定義により t,u のみに依存する $r_{tu} \in R$ が存在して

$$m_{st} m_{uv} - r_{tu} m_{sv} \in \sum_{(p,q) \in \sqcup_{\mu > \lambda} T(\mu) \times T(\mu)} R m_{pq}$$

とかけるから， $C(\lambda)$ 上に $\langle m_t, m_u \rangle = r_{tu}$ により対称双線形形式を定義する．

$$\mathrm{Rad}\ C(\lambda) = C(\lambda)^{\perp}, \quad D(\lambda) = C(\lambda)/\mathrm{Rad}\ C(\lambda)$$

とおく．

定理 1.5 (Graham-Lehrer). R を体， A を有限次元 cellular R- 代数とする．

(1) $\{D(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda} \setminus \{0\}$ は A の既約加群の完全代表系で，すべて絶対既約加群．

(2) $C(\lambda) = D(\lambda)$ がすべての $\lambda \in \Lambda$ に対して成り立つならば A は半単純環．

(3) $D(\lambda) \neq 0$ がすべての $\lambda \in \Lambda$ に対して成り立つならば A は quasihereditary 代数．とくに， A が対称代数ならば $D(\lambda) \neq 0$ がすべての $\lambda \in \Lambda$ に対して成り立てば A は半単純環．

(4) $D(\lambda) \neq 0$ の射影被覆を $P(\lambda)$ とすると， $P(\lambda)$ は

$$P(\lambda) = F_0 \supset F_1 \supset \cdots$$

かつ， $F_0/F_1 \simeq C(\lambda)$， $F_i/F_{i+1} \simeq C(\mu_i)\ (\mu_i > \lambda)$ なる filtration をもつ．

2 affine Wenzl 代数

代数群に関連して出てくる代数には Hecke 代数や Birman-Wenzl-Murakami 代数（ BMW 代数と略することが多い）があるが，これらの代数のモジュラー表現の研究は 90 年代にようやくはじまり，まだまだやることが多い．また，それぞれに affine 化された無限次元代数があり，A 型 Hecke 代数の affine 化は A 型 affine Hecke 代数，BMW Hecke 代数の affine 化は affine BMW 代数，である．さらにこれらの環の“微分”によって退化版が得られ，A 型 affine Hecke 代数の退化は A 型退化 affine Hecke 代数，affine BMW 代数の退化は affine Wenzl 代数，なのであるが，本稿では affine Wenzl 代数を扱う．

定義 2.1. R を可換環，$\Omega=\{\omega_a|a\geq 0\}\subseteq R$ とする．簡単のため $\omega_0\neq 0$ を仮定する．affine Wenzl 代数 $\mathcal{W}_n^{\mathrm{aff}}(\Omega)$ とは生成元

$$\{S_i, E_i, X_j | 1\leq i<n,\ 1\leq j\leq n\}$$

と次の基本関係で定義される R−代数である．

1. *(Involutions)*
   $S_i^2=1.$
2. *(Affine braid relations)*
   (a) $S_iS_j=S_jS_i,\ (|i-j|>1),$
   (b) $S_iS_{i+1}S_i=S_{i+1}S_iS_{i+1},$
   (c) $S_iX_j=X_jS_i,\ (j\neq i,i+1).$
3. *(Idempotent relations)*
   $E_i^2=\omega_0E_i.$
4. *(Commutation relations)*
   (a) $S_iE_j=E_jS_i,\ (|i-j|>1),$
   (b) $E_iE_j=E_jE_i,\ (|i-j|>1),$
   (c) $E_iX_j=X_jE_i,\ (j\neq i,i+1),$
   (d) $X_iX_j=X_jX_i,$
5. *(Skein relations)*
   $S_iX_i-X_{i+1}S_i=E_i-1,$
   $X_iS_i-S_iX_{i+1}=E_i-1.$
6. *(Unwrapping relations)*
   $E_1X_1^aE_1=\omega_aE_1.$
7. *(Tangle relations)*
   (a) $E_iS_i=E_i=S_iE_i,$
   (b) $S_iE_{i+1}E_i=S_{i+1}E_i,$
   (c) $E_{i+1}E_iS_{i+1}=E_{i+1}S_i.$
8. *(Untwisting relations)*
   $E_{i+1}E_iE_{i+1}=E_{i+1},$
   $E_iE_{i+1}E_i=E_i.$
9. *(Anti-symmetry relations)*
   $E_i(X_i+X_{i+1})=0,$
   $(X_i+X_{i+1})E_i=0.$

R を奇標数の任意の代数閉体とする．[1] において我々は affine Wenzl 代数のすべての有限次元既約表現を構成することに成功した．その方針は，affine Wenzl 代数の巡回商とよばれる有限次元商を考え，これらの巡回商が cellular 代数であることを示すことによりすべての既約表現を構成するというものである．

定義 2.2.

$$\prod_{i=1}^{r}\frac{1+t_iy}{1-t_iy}=\sum_{a\geq 0}q_a(t_1,\ldots,t_r)y^a$$

により，Schur q−関数を定義する．R を $\frac{1}{2}$ をもつ可換環であって

$$\omega_a=q_{a+1}(u_1,\ldots,u_r)-\frac{1}{2}(-1)^rq_a(u_1,\ldots,u_r)+\frac{1}{2}\delta_{a0}$$

のとき，Ω は u-admissible であるという．

定義 2.3. 2 が R 中で可逆と仮定する．$\{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq R$ を Ω が u-admissible となるように定めたとき，$\mathcal{W}_n^{\mathrm{aff}}(\Omega)$ に $(X_1 - u_1)\cdots(X_1 - u_r) = 0$ という関係式を追加して得られる R-代数を $\mathcal{W}_{r,n}(\mathbf{u})$ とかき，巡回 Nazarov–Wenzl 代数とよぶ．

定理 2.4. $\mathcal{W}_{r,n}(\mathbf{u})$ は R-加群としての rank が $r^n(2n-1)!!$ の cellular R-代数である．

とくに R が奇標数の代数閉体のとき $\mathcal{W}_{r,n}(\mathbf{u})$ のすべての既約表現が構成できることになる．

A 型 affine Hecke 代数の場合は u-admissible のような条件は必要なく，無条件に巡回商が cellular 代数になった．さらに，任意の代数閉体上の既約表現の分類が柏原クリスタルで記述できる．affine Wenzl 代数の場合は u-admissible という条件がつかないと巡回商がうまくいかないのであるが，それでも affine Wenzl 代数のすべての有限次元既約表現をこれらの巡回商からの引き戻しで得られることを示すことができ，また既約表現の分類が柏原クリスタルで記述できるのである．これにより，affine Wenzl 代数 $\mathcal{W}_n^{\mathrm{aff}}(\Omega)$ のすべての有限次元既約表現を構成できたことになる．

3 セル基底の構成

定理 2.4を示すには，巡回 Nazarov–Wenzl 代数 $\mathcal{W}_{r,n}(\mathbf{u})$ のセル基底を構成しなければならないわけであるが，その構成方法を説明する．まず Λ を

$$\Lambda = \left\{ (f, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}) | 0 \leq f \leq [n/2], \sum_{i=1}^{r} |\lambda^{(i)}| = n - 2f \right\}$$

に次の半順序を定義した半順序集合とする．ここで，各 $\lambda^{(i)}$ はヤング図形である．

$$(f, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}) \leq (g, \mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(r)}) \Longleftrightarrow f < g \text{ または}$$

$f = g$ かつすべての j, k に対して

$$\sum_{1 \leq i < k} |\lambda^{(i)}| + \sum_{1 \leq i \leq j} \lambda_i^{(k)} \leq \sum_{1 \leq i < k} |\mu^{(i)}| + \sum_{1 \leq i \leq j} \mu_i^{(k)}.$$

$W_f \subset S_{2f}$ を B 型 Weyl 群とし，S_n を左から $W_f \times S_{n-2f}$ で割った左剰余類の完全代表系として distinguished coset representative，つまり各剰余類において転倒数が最小のものをとる．この完全代表系を D_f とかこう．

以下 $(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$ を λ と略記し，$\mathrm{Stab}(\lambda)$ を shape λ の標準盤のなす集合とし，

$$T(f, \lambda) = \{(t, \kappa, d) | t \in \mathrm{Stab}(\lambda), \kappa \in \mathbb{N}^f, d \in D_f\}$$

と定める．また，$\kappa = (k_{n-1}, k_{n-3}, \ldots, k_{n-2f+1})$ に対し

$$X^\kappa = \prod_{i=1}^{f} X_{n+1-2i}^{k_{n+1-2i}} \in \mathcal{W}_{r,n}(\mathbf{u})$$

と略記する．

定義 3.1. $a_i = \sum_{1 \le j < i} |\lambda^{(j)}|$, $x_\lambda = \sum_{w \in S_\lambda} w$ とおき,

$$m_{st}^f = d(s) \left(x_\lambda \prod_{i=2}^{r} \prod_{j=1}^{a_i} (X_j - u_i) \right) d(t)^*, \quad E^f = \prod_{i=1}^{f} E_{n+1-2i},$$

と定義する.

定義 3.2. $(s, \rho, e), (t, \kappa, d) \in \sqcup_{(f,\lambda)\in\Lambda} T(f, \lambda) \times T(f, \lambda)$ に対し,

$$m_{(s,\rho,e)(t,\kappa,d)} = eX^\rho E^f m_{st}^f X^\kappa d^*$$

とおく.

定理 2.4 を示すには $\{m_{(s,\rho,e)(t,\kappa,d)}\}$ が $\mathcal{W}_{r,n}(\mathbf{u})$ のセル基底をなすことを証明するのである.

References

[1] S. Ariki, A. Mathas and H. Rui, Cyclotomic Nazarov-Wenzl algebras, **math.QA/0506467**. To appear in Nagoya Math. J.

[2] J. Enyang, Cellular bases for the Brauer and Birman-Murakami-Wenzl algebras, J. Algebra, **281** (2004), 413–449.

[3] F. Goodman and H. Hauschild, Affine Birman-Wenzl-Murakami Algebras and Tangles in the Solid Torus, **math.QA/0411155**.

[4] J. Graham and G. Lehrer, Cellular algebras, Invent. Math. **123** (1996), 1–34.

[5] R. Häring-Oldenburg, Cyclotomic Birman-Murakami-Wenzl algebras, J. Pure Appl. Algebra **161** (2001), 113–144.

[6] R. Leduc and A. Ram, A ribbon Hopf algebra approach to the irreducible representations of centralizer algebras: the Brauer, Birman-Wenzl, and type A Iwahori-Hecke algebras, Adv. Math. **125** (1997), 1–94.

[7] G. Lusztig, Cuspidal local systems and graded Hecke algebras. I, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **67** (1988), 145–202.

[8] G. Lusztig, Affine Hecke algebras and their graded version, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 599–635.

[9] G. Lusztig, Cuspidal local systems and graded Hecke algebras II, in Representations of groups (Banff, AB, 1994), CMS Conf. Proc. **16** (1995), 217–275.

[10] G. Lusztig, Cuspidal local systems and graded Hecke algebras III, Represent. Theory **6** (2002), 202–242.

[11] M. Nazarov, Young's orthogonal form for Brauer's centralizer algebra, J. Algebra **182** (1996), 664–693.

[12] R. Orellana and A. Ram, Affine braids, Markov traces and the category O, **math.RT/0401317**.